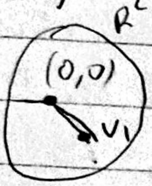
1/12/15

Πρόταση: Το $\langle v_1 \dots v_n \rangle$ είναι γραμμικός υπόχωρος του V και μάλιστα ο ελάχιστος υπόχωρος του V που περιέχει τα $v_1, v_2, \dots v_n$

Απόδειξη

Παρόμοια με την περίπτωση $n=1$ που κάναμε αναλυτικά.

Παράδειγμα: $\mathbb{R}^2$

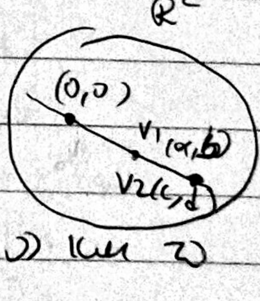


Υπόχωροι
- $\{0_V\}$
- οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων
- $\mathbb{R}^2$

Περίπτωση 1: $n=1$ δηλ. $\langle v_1 \rangle$ Έστω $v_1=(\alpha,b)$

Αν $v_1=(0,0) \Rightarrow \langle v_1 \rangle = \{(0,0)\}$

$v_1 \neq (0,0) \Rightarrow \langle v_1 \rangle$ η ευθεία που ορίζουν το $(0,0)$ και $v_1=(\alpha,b)$

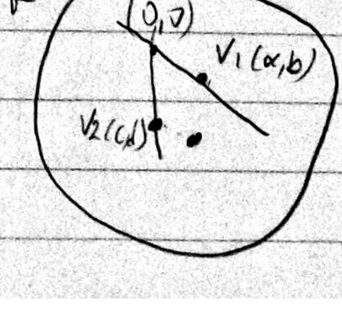


Έστω $v_1=(\alpha,b)\neq(0,0)$, $v_2=(c,d)\neq(0,0)$

Περίπτωση 1) $v_2 \in$ ευθεία που ενώνει $(0,0)$ και v_1

Τότε $\langle v_1,v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle =$ ευθεία που ορίζουν τα $(0,0)$ και το $v_1=(\alpha,b)$

Περίπτωση 2) $v_2 \notin$ που ενώνει $(0,0)$ και v_1. Τότε $\langle v_1,v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$



Ορισμός: Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος F. Ο V λέγεται ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ (ή πεπερασμένα παραγόμενος) αν υπάρχει $n \geq 1$ ακέραιος και $v_1, v_2, \dots, v_n$ ώστε $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.
Αλλιώς λέγεται άπειρης διάστασης.

Παράδειγμα: i) Έστω $V = F^{2\times 2}$. Ορίζουμε

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$. Τότε $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot E_{11} + b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22}$. Άρα $V = \langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \rangle$
Ομοίως $F^{\nu \times \mu}$ πεπερασμένης διάστασης για κάθε $\nu, \mu \geq 1$

Παράδειγμα: $V = F^3$. Θέτουμε $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Φανερά $V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ γιατί $(a,b,c) = a \cdot e_1 + b e_2 + c \cdot e_3$.
Άρα V πεπερασμένης διάστασης. Ομοίως F^ν πεπερασμένης διάστασης για κάθε $\nu \geq 1$

Παράδειγμα: Έστω $V = \mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, n \geq 0, a_i \in \mathbb{R}\}$.
Ο V δεν είναι πεπερασμένης διάστασης
Απόδειξη
Έστω $f_1(x), \dots, f_n(x) \in V$. Θέτουμε μ ο μέγιστος βαθμός των $f_i(x)$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε $x^{\mu+1} \notin \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle$.
Άρα $V \neq \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle$. Άρα V άπειρης διάστασης επί του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Έστω $V=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,0,1)$. Ποιο είναι το $\langle v_1, v_2 \rangle$;

Απάντηση: $\langle v_1, v_2 \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$
$= \{\lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,0,1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$
$= \{\{\lambda_1, 0, \lambda_2\} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

Παράδειγμα: Θεωρούμε το ακόλουθο *γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων και 5 αγνώστων:

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$
$2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0$
$-x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 5x_5 = 0$

* ομογενές

Μετά από πράξεις, το σύνολο λύσεων $S \subseteq \mathbb{R}^{5\times1}$ είναι ίσο με

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3\xi_2 - \xi_4 + 2\xi_5 \\ \xi_2 \\ -\xi_4/3 - \xi_5 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} : \xi_2, \xi_4, \xi_5 : \mathbb{R} \right\}$$

το οποίο είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{5\times1}$. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} -\xi_2 - \xi_4 + 2\xi_5 \\ \xi_2 \\ -\xi_4/3 - \xi_5 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα $S = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{5\times1}$

Πρόταση: Έστω V διανυσματικός χώρος $/F$ και $v_1, \dots v_n \in F$. Τότε:

i) Αν $i \in \{1, \dots, n\}$ και $\lambda \in F$ με $\lambda \neq 0_F$ τότε $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1} \dots v_n \rangle$

Δηλαδή ο υπόχωρος που παράγουν τα $v_1, \dots, v_n$ δεν αλλάζει αν πολλαπλασιάσουμε ένα από αυτά με μη μηδενικό στοιχείο του F.

ii) Αν $i, j \in \{1, \dots, n\}$ με $i \neq j$ και $\lambda \in F$ τότε $\langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots v_n \rangle = \langle v_1, \dots v_{j-1}, v_j + \lambda v_i, v_{j+1}, \dots v_n \rangle$

Δηλαδή ο υπόχωρος που παράγουν τα $v_1, \dots v_n$ δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε το v_j με το $v_j + \lambda v_i$.

iii) Ο υπόχωρος που παράγουν τα $v_1, \dots v_n$ δεν αλλάζει αν αλλάξουμε τη σειρά τους.

Απόδειξη:

i) Έστω $A = \langle v_1, \dots v_n \rangle$, $B = \langle v_1, \dots v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$.

Θ.δ.ο. $A = B$.

Πρώτα δείχνουμε $A \subseteq B$: Έστω $v \in A$. Τότε υπάρχουν $\mu_1, \dots \mu_n \in F$ με $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

Έχουμε $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \dots + \mu_n v_n$

$= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \frac{\mu_i}{\lambda} (\lambda v_i) + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n$

Άρα $v \in B$. Συνεπώς $A \subseteq B$.

Δείχνουμε $B \subseteq A$. Έστω $v \in B$. Άρα υπάρχουν $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n \in F$ ώστε $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_i (\lambda v_i) + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n$

$\Rightarrow v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + (\mu_i \lambda) v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n$

Άρα $v \in A$. Έτσι $B \subseteq A$. Τελικά $B = A$

ii) Παρόμοια με την i) άσκηση

iii) Προφανές

Πόρισμα: Έστω $A,B \in F^{\nu\times\mu}$. Υποθέτουμε A,B γραμμοϊσοδύναμοι. Τότε ο υπόχωρος του $F^{1\times\mu}$ που παράγεται από τις γραμμές του A είναι ίσος με τον υπόχωρο του $F^{1\times\mu}$ που παράγεται από τις γραμμές του B.

Παράδειγμα $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix} \xrightarrow{v_1 \to v_2-3v_1} B=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$

Η πρόταση λέει ότι $\langle[1,2],[3,6]\rangle=\langle[1,2],[0,0]\rangle$ ισότητα σαν υπόχωροι του $F^{1\times2}$.

Απόδειξη της πρότασης:

Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω μιας γραμμοπράξεις το αποτέλεσμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση. Η γενική περίπτωση με επαγωγή στον αριθμό των γραμμοπράξεων που μας πάνε από τον A στο B.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ορισμός: Έστω V διαν. χώρος$/F$, $n\geq1$ και $v_1,v_2,\dots,v_n\in V$. Τα $v_1,\dots,v_n$ λέγονται ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ αν υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in F$ όχι όλα μηδέν με την ιδιότητα $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n=0_V$

Αν τα $v_1,\dots,v_n$ δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα λέγονται γραμμ. ανεξάρτητα.

$\mathbb{R}^2$ (0,0) $n=1$. Αν το $v_1=(0,0)$ επειδή $\lambda_1=1_{\mathbb{R}}\cdot v_1=0_V$ το v_1 είναι γραμμ. εξαρτημένο.

Αν $v_1=(a,b)\neq(0,0)$ και $\lambda_1\in\mathbb{R}$ $\lambda_1v_1=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1a=0\\ \lambda_1b=0\end{cases} \Rightarrow \lambda_1=0_{\mathbb{R}}$ ($a\neq0$ ή $b\neq0$)

Άρα $\lambda_1=0_{\mathbb{R}}$ συνεπώς v_1 γραμμ. ανεξ.

$n=2$ και $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$

Περίπτωση 1: $v_1=(0,0)$. Τότε για $\lambda_1=1_{\mathbb{R}}$, $\lambda_2=0_{\mathbb{R}}$ έχουμε $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=0_V \Rightarrow v_1,v_2$ ΓΡΑΜΜ. ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ

Περίπτωση 2: $V_2=(0,0)$. Ομοίως ξανά V_1, V_2 ΓΡΑΜ. ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ

~~επειδή $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=0_V \Rightarrow v_1, v$~~

Περίπτωση 3: $V_1=(\alpha,b)$, $V_2=(c,d)$ με V_1, V_2 μη μηδενικά, αλλά στην ίδια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Τότε $V_2 \in \langle V_1\rangle \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ με $V_2=\lambda V_1 \Rightarrow$
$\lambda V_1 - 1V_2 = 0_V \Rightarrow V_1, V_2$ γραμ. εξαρτημένα

Περίπτωση 4: V_1, V_2 μη μηδενικά, V_2 όχι στην ευθεία που ορίζουν τα $(0,0)$ και το V_1

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: V_1, V_2 γραμμικά εξαρτημένα

Απόδειξη: Έστω ότι δεν είναι $\Rightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ όχι και τα δύο μηδέν με $\lambda_1 V_1+\lambda_2 V_2=0_V=(0,0)$. Αν $\lambda_1 \neq 0$ $\Rightarrow V_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}V_2$ αντίφαση. Ομοίως αντίφαση αν $\lambda_2 \neq 0$.

Παρατήρηση: Έστω F σώμα, V διανυσματικός χώρος επί του F, $n \geq 1$ και $V_1, \dots V_n \in F$.

$n=1$ V_1 γραμμικά εξαρτημένα $\Leftrightarrow V_1=0_V$, V_1 γραμ. ανεξ. $\Leftrightarrow V_1 \neq 0_V$

$n=2$ V_1, V_2 γραμ. εξαρτ. $\Leftrightarrow V_2 \in \langle V_1\rangle$ ή $V_1 \in \langle V_2\rangle$ (ή και τα δύο)

V_1, V_2 γραμ. ανεξαρτ. $\Leftrightarrow \langle V_1\rangle \subsetneq \langle V_1,V_2\rangle$ ΚΑΙ $\langle V_2\rangle \subsetneq \langle V_1,V_2\rangle$

$n=3$ V_1,V_2,V_3 γραμ. εξαρτ. $\Leftrightarrow V_3 \in \langle V_1,V_2\rangle$ ή $V_2 \in \langle V_1,V_3\rangle$ ή $V_1 \in \langle V_2,V_3\rangle$

V_1,V_2,V_3 γραμ. εξαρτ. $\Leftrightarrow \langle V_1,V_2\rangle \subsetneq \langle V_1,V_2,V_3\rangle$ ΚΑΙ $\langle V_1,V_3\rangle \subsetneq \langle V_1,V_2,V_3\rangle$ και $\langle V_2,V_3\rangle \subsetneq \langle V_1,V_2,V_3\rangle$

Παράδειγμα: Έστω $V=\mathbb{R}^3$, $V_1=(1,0,0)$, $V_2=(0,1,0)$, $V_3=(0,0,1)$. Υποθέτουμε $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 V_1+\lambda_2 V_2+\lambda_3 V_3=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$

Ισοδύναμα $\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$

Άρα $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0_{\mathbb{R}}$. Επομένως V_1,V_2,V_3 γραμ. ανεξάρτητα

ii) Εξετάζουμε αν στο $V=\mathbb{R}^3$ τα $v_1=(1,-2,1)$, $v_2=(2,1,-7)$, $v_3=(1,8,-17)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Υποθέτουμε $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ με $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0_V=(0,0,0)$. Ισοδύναμα

$\lambda_1(1,-2,1)+\lambda_2(2,1,-7)+\lambda_3(1,8,-17)=(0,0,0)$

Ισοδύναμα $(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3,\ -2\lambda_1+\lambda_2+8\lambda_3,\ \lambda_1-7\lambda_2-17\lambda_3)=(0,0,0)$

Ισοδύναμα
$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+2\lambda_2+8\lambda_3=0\\ \lambda_1-7\lambda_2-17\lambda_3=0\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα, βλέπουμε ότι έχει και μη μηδενικές λύσεις

π.χ. $(\lambda_1=3, \lambda_2=-2, \lambda_3=1)$

Άρα τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Παρατήρηση: Έστω $v_1,\dots v_n\in V$. Αν υπάρχει i με $v_i=0_V$ τότε τα $v_1,v_2,\dots,v_n$ είναι γραμμ. εξαρτημένα.

Πράγματι! Θέτουμε $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{i-1}=\lambda_{i+1}=\dots=\lambda_n=0$ και $\lambda_i=1_F$ και έχουμε $\lambda_1,\dots\lambda_n$ όχι όλα μηδέν, αλλά $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n=0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Υποθέτουμε ότι τα $v_1,\dots v_n$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα. Τότε αν $t\le n$ έχουμε και ότι τα $v_1,v_2,\dots v_t$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα.